CONCOURS EXTERNE D'INGENIEURS DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE (MAI 1984)

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Epreuve obligatoire à option : MATHEMATIQUES II

(Durée : 4 heures; Coefficient : 6)

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

Les deux problèmes sont indépendants. La rigueur dans les démonstrations et le soin dans la présentation seront pris en compte dans la notation.

PROBLEME 1

Les parties A et B sont indépendantes entre elles.

PARTIE A :

Soit $\{ x_1, \ldots, x_n \}$ un n-uplet de réels

1°) Soit $\omega \in \mathbb{R}$; On pose $\alpha_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-ik\omega}$, $\omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{n}$

Montrer que $\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_n(\omega_\ell) e^{ik\omega_\ell} = x_k$

2°) On pose $S_n(\omega) = |\alpha_n(\omega)|^2$;

Exprimer $S_n(\omega + 2\pi)$ et $S_n(-\omega)$ en fonction de $S_n(\omega)$

3°) On pose $\rho_h = \frac{1}{n-h} \sum_{k=1}^{n-h} x_k x_{k+h}$ pour h entier de $[0, n-1]$.

Exprimer $S_n(\omega)$ comme combinaison linéaire à coefficients réels (dépendant de ω) des ρ_h.

4°) Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_n(\omega)\, d\omega$ et $\frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} S_n(\omega_\ell)$

PARTIE B :

1°) Calculer $\sum_{k=1}^{n} e^{\beta k}$, $\beta \in \mathbb{C}$

2°) Calculer $\sum_{k=1}^{n} k\, e^{\beta k}$ en se servant du résultat de la question précédente.

3°) En déduire :

$$\forall \beta \in \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) . e^{\beta k} = \frac{e^{\beta}}{1-e^{\beta}} - \frac{(1 - e^{\beta n})\, e^{\beta}}{n\,(1 - e^{\beta})^2}$$

4°) Calculer

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \cos \gamma k \qquad (\gamma \in \mathbb{R})$$

5°) Calculer

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) e^{\delta k} . \cos \gamma k \; ; \; (\gamma , \delta) \in \mathbb{R}^2$$

PARTIE C :

On reprend les notations de A et on suppose $\omega \in [0, \pi[$

1°) On suppose $\rho_h = 0 \quad \forall h > 0$. Calculer $S_n(\omega)$

2°) On suppose $\rho_h = 1 \quad \forall h \geq 0$. Calculer $S_n(\omega)$

3°) On suppose $\rho_h = \cos \omega_0 h \quad , \omega_0 \in [0, \pi]$

Calculer $S_n(\omega)$. Quelle est la limite de $S_n(\omega)$ quand n tend vers l'infini ?

4°) On suppose $\rho_h = e^{-\beta h}$, $\beta \in \mathbb{R}+$. Montrer que si $\beta > 0$

$\lim_{n \to \infty} S_n(\omega) = 0$ et calculer $\lim_{n \to \infty} n.S_n(\omega)$

Que peut-on dire si $\beta = 0$?

PROBLEME II

Soit l'équation $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ (E)

1°) Démontrer que (E) a une solution réelle unique. Cette solution sera notée x_0.

2°) Montrer que x_0 n'est pas rationnelle et donner $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x_0 \in]n, n+1[$;

3°) Démontrer que si a, b, c sont rationnels et $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$, alors $a = b = c = 0$

4°) Soit H le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{Q}$ engendré par $\{ x_0^k, \quad k \in \mathbb{Z} \}$

Montrer qu'il est de dimension finie et donner sa dimension.

5°) Montrer que H est un sous-corps de $\mathbb{R}$

P 202